Anna Broniarczyk, *III Liceum Ogólnokształcące w Łodzi*

Jacek Człapiński (red.), *doradca metodyczny w ŁCDNiKP w Łodzi, XXV Liceum Ogólnokształcące w Łodzi*

Izabela Głowacka –Wrzesień, *Zespół Szkół Przemysłu Mody w Łodzi*

Agnieszka Pietrasik, *XV Liceum Ogólnokształcące i IV Liceum Ogólnokształcące w Łodzi*

Teresa Zajkiewicz, *Zespół Szkół Ekonomii i Usług w Łodzi*

*Między teorią a praktyką oceniania zadań optymalizacyjnych.*

*Streszczenie.*

*Artykuł jest poświęcony pragmatyce procesu oceniania zadań egzaminacyjnych z matematyki w obszarze zastosowania rachunku różniczkowego w zagadnieniach optymalizacyjnych i wątpliwościom z tym związanych i powstał jako zwieńczenie cyklu warsztatów nt. „Elementy rachunku różniczkowego w podstawie programowej i praktyce szkolnej”. Proces konstruowania i wdrażania schematów oceniania winien w większym stopniu być otwarty na opinie środowiska, a sposób jego tworzenia nie służy doskonaleniu procesu kształcenia i egzaminowania, ale jest powielaniem zachowań decydentów, którzy odpowiadają za reformy edukacyjne dotyczące całego systemu szkolnego – stąd na początku umieszczono kilka akapitów poświęconych zmianom systemu edukacyjnego w Polsce.*

Zmiany

Stałym elementem rzeczywistości edukacyjnej w Polsce po roku 1989 jest zmiana. Niestety, nie zawsze jest ona związana ze specyfiką szkoły, jako instytucji uczącej się, czyli modyfikującej swoją działalność w kierunku doskonalenia form i warunków pracy z uczniem. Częściej jest podyktowana innymi względami, także o charakterze politycznym, a jej konsekwencje wprowadzają niemały chaos w szkołach i przestrzeni publicznej.

Ważnym obszarem tych ciągłych zmian jest sfera modyfikacji podstaw programowych, dokonywanych w niemałym pośpiechu i w oderwaniu od szerokich konsultacji w środowisku nauczycielskim. Dotyczy to także matematyki.

 Ostatnie zmiany i powrót do kształcenia w czteroletnim liceum i pięcioletnim technikum mogły być szansą na uzupełnianie różnic w kompetencjach matematycznych uczniów klas I tych szkół, zwłaszcza tych związanych ze sprawnością rachunkową oraz okazją, by w praktyce wdrożyć założenia czynnościowego kształcenia matematyki, w którym jest czas na taką realizację każdego zagadnienia, która uwzględni etap operacji konkretnych, wyobrażeniowych**,** a następnie abstrakcyjnych.

Tymczasem przesunięcie szeregu zagadnień z podstaw programowych gimnazjum do szkół ponadpodstawowych nowego typu, w tym m.in. wszystkich treści związanych z układami równań liniowych, podobieństwem figur, w tym trójkątów, konstrukcjami geometrycznymi, bryłami obrotowymi itd. powoduje, że na ich realizację w szkole ponadpodstawowej trzeba będzie przeznaczyć ponad 90 godzin  tym samym na nowe zagadnienia pozostanie tylko nieco ponad 20 godzin z tych, które w nowym ramowym planie nauczania pojawiają się w szkołach tego etapu kształcenia. Tymczasem przesunięcie z zakresu rozszerzonego do podstawowego samych zagadnień związanych z wielomianami i funkcją wymierną wymaga przeznaczenia na ich realizację niemal 20 godzin, a przeniesienie z rozszerzenia niemal wszystkich zagadnień z geometrii analitycznej to kolejne 15 godzin, które trzeba wprowadzić do rozkładu nauczania na poziomie podstawowym. Analiza porównawcza obowiązującej podstawy programowej i przykładowych rozkładów nauczania pozwala przyjąć, że przesunięcie wszystkich zagadnień, które obecnie są realizowane na poziomie rozszerzonym, a mają być obowiązkowe na poziomie podstawowym, wymaga ponad 80 godzin w cyklu nauczania. Tym samym wprowadzane zmiany wymagają zwiększenia liczby godzin nauczania matematyki w liceach o blisko 50 godzin w cyklu, w stosunku do zapisanego w rozporządzeniu o ramowych planach nauczania rozkładu $3-4-3-4$. Podobny „niedobór” będzie dotyczył także techników.

 Lektura projektu oraz uwag o warunkach i sposobach realizacji wskazuje na niespójność zapisów – z jednej strony zasadnie podkreśla się wagę złożonych kompetencji matematycznych, takich jak rozumowanie i argumentacja, z drugiej jednak strony niektóre zagadnienia są wprowadzane w oderwaniu od ich definicji czy interpretacji, tym samym z założenia rezygnujemy z kształtowania tego pojęcia w sposób czynnościowy, poprzestając na etapie operacji konkretnych.

 Wątpliwości budzi także sposób opisu wymagań szczegółowych. Proponowane zapisy nie tylko nie usuwają wad obowiązującej podstawy polegających na tym, że nie precyzowała ona, jakie zagadnienia winny być omawiane w dopuszczonych do użytku szkolnego programach, ale tę swoistą wadę pogłębiają.

Tak więc sposób prezentacji treści nie jest spójnym opisem wymagań szczegółowych. Niekiedy wydaje się być on swoistą refleksją autorów projektu nad obowiązującą podstawą i głosem w dyskusji nad kierunkami jej zmian, ale ta refleksja w niewielkim stopniu znalazła odzwierciedlenie w zapisach, a w znacznej części pozostała tylko w świadomości autorów.

 **System egzaminów zewnętrznych.**

 Zmiana podstawy programowej z roku 1999 była integralnie związana z utworzeniem Centralnej Komisji Egzaminacyjnej oraz ośmiu komisji okręgowych, których zadaniem było budowanie nowego systemu egzaminacyjnego, opartego na zewnętrznej weryfikacji osiągnięć szkolnych ucznia. Wdrożenie tego nowego systemu ograniczało swobodę nauczyciela w procesie oceniania osiągnięć ucznia na rzecz wdrożenia systemu kryterialnego.

 Także ten aspekt stał się w ostatnich latach areną wprowadzania zmian – przejście od oceniania czynnościowego na rzecz oceniania holistycznego. Nie sposób nie zauważyć, że zmiana filozofii oceniania nie zawsze znajduje zastosowanie w praktyce egzaminacyjnej i kolejnych sesjach egzaminacyjnych. Nawet w trakcie tej samej sesji, ale w różnych zadaniach, oba te spojrzenia są stosowane przemiennie, nie bez wpływu na odczucia egzaminatorów, którzy nie widzą w tym realizacji podstawowych funkcji oceny szkolnej.

Zadania optymalizacyjne.

Rok szkolny 2014/2015 przyniósł sfinalizowanie zmian podstawy programowej roku 2009. Najpierw „nowy egzamin gimnazjalny” w roku 2012, a później matura przeprowadzona w maju 2015 r., były zwieńczeniem wprowadzania zmian programowych, których najbardziej charakterystycznym wyznacznikiem było i wciąż jest pojawienie się w arkuszach egzaminacyjnych tzw. „zadań optymalizacyjnych”, dla których, na zasadzie wyłączności, zarezerwowano w schematach oceniania aż 7 punktów.

 Zazwyczaj, co jest zapisane w materiałach pomocniczych dla ucznia i nauczyciela dostępnych w zasobach internetowych Centralnej Komisji Egzaminacyjnej, schemat punktowania zadania z optymalizacji odnosi się do trzech etapów rozwiązania:

1. pierwszy etap, składający się z kilku części, dotyczy zbudowania funkcji, która będzie modelem danej sytuacji problemowej i wyznaczenia dziedziny badanej funkcji, przy czym za poprawne wykonanie każdej z części zdający otrzymuje 1 punkt;
2. drugi etap składa się zwyczajowo z trzech części:
	* wyznaczenie pochodnej odpowiedniej funkcji,
	* obliczenie miejsc zerowych pochodnej tej funkcji,
	* uzasadnienie, że dla określonego argumentu funkcja osiąga swoją najmniejszą względnie największą wartość.

Także tutaj za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje 1 punkt.

1. Trzeci etapem jest wyznaczenie (obliczenie) zadanej wielkości i za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje 1 punkt.

W artykule nie będziemy dyskutować nad nie do końca uzasadnionymi sztywnymi ramami punktowania tego typu zadania, które w żaden sposób nie uwzględniają różnego stopnia złożoności problemów, jakie będą pojawiały się w kolejnych sesjach egzaminacyjnych[[1]](#footnote-1), ale odniesiemy się jedynie do praktyki przyznawania, a mamy wrażenie, że częściej nieprzyznawania punktów związanych z uzasadnieniem, że funkcja przyjmuje swoje globalne ekstrema w określonych punktach, a punktem wyjścia będzie zadanie z egzaminu maturalnego z sesji majowej 2017 roku. Nie będziemy również odwoływać się do zbędnego naszym zdaniem narzucenia w schemacie metody sposobu uzasadnienia wartości największej poprzez badanie znaku pierwszej pochodnej.

Pułapki oceniania.

 W trakcie szkolenia wstępnego dla kandydatów na egzaminatorów prowadzący omawiają zagadnienie zatytułowane „Pułapki oceniania”, związane z trudnymi sytuacjami, przed którymi niekiedy staje egzaminator. Zdaje się, że nie ma tam mowy o pułapkach zastawionych przez autorów kryteriów oceniania zadań, ale z pewnością jest mowa o bardzo skrupulatnym i dokładnym stosowaniu zapisanych kryteriów. Powoduje to, że niekiedy te właśnie zapisy są pułapką, w którą wpada egzaminator, ale także abiturient, czy pośrednio nauczyciel przygotowujący ucznia do egzaminu maturalnego.

 Punktem wyjścia do naszej analizy będzie zadanie z egzaminu maturalnego, które znajdziemy w arkuszu maturalnym z maja 2017r. Na wstępie przypomnijmy jego treść i przykładowe rozwiązanie zamieszczone pod adresem: https://cke.gov.pl/images/\_EGZAMIN\_MATURALNY\_OD\_2015/ Arkusze\_ egzaminacyjne/2017/formula\_od\_2015/zasady\_oceniania/MMA-R1-N.pdf

Zadanie 15. (0−7)

Rozpatrujemy wszystkie walce o danym polu powierzchni całkowitej *P*. Oblicz wysokość i promień podstawy tego walca, którego objętość jest największa. Oblicz tę największą objętość.

**Przykładowe rozwiązanie**

Niech  oraz  oznaczają, odpowiednio, promień podstawy walca i wysokość walca. Pole *P* powierzchni całkowitej tego walca jest równe . Stąd

.

Objętość walca  zapisujemy jako funkcję zmiennej :

, gdzie .

Pochodna funkcji *V* jest określona wzorem

 dla .

Wyznaczamy miejsca zerowe i badamy znak pochodnej

 wtedy i tylko wtedy, gdy ,

 wtedy i tylko wtedy, gdy ,

 wtedy i tylko wtedy, gdy .

Wynika stąd, że w przedziale  funkcja *V* jest rosnąca, a w przedziale  jest malejąca. Zatem  jest największą wartością tej funkcji. Wartość ta jest równa

.

Gdy , to wtedy .

Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

1. **Pierwszy etap** składa się z trzech części:
	* wyznaczenie wysokości walca w zależności od promienia podstawy walca: ,
	* wyznaczenie objętości walca jako funkcji jednej zmiennej *r*, ,
	* wyznaczenie dziedziny funkcji : .

Za poprawne wykonanie każdej z tych części zdający otrzymuje **1 punkt**.

1. **Drugi etap** składa się z trzech części:
	* wyznaczenie pochodnej funkcji wielomianowej :

 ,

* + obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji *V*:  lub obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji *f*: , .
	+ zbadanie znaku pochodnej funkcji *V* i uzasadnienie, że dla funkcja  osiąga największą wartość.

Za poprawne rozwiązanie **każdej** z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

1. **Trzeci etap**.

Obliczenie największej objętości walca i wysokości walca o największej objętości:  , .

Za poprawne wykonanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający zapisze objętość walca z błędem rzeczowym, to może otrzymać co najwyżej **1 punkt** za całe rozwiązanie, a jeżeli dodatkowo poprawnie wyznaczy dziedzinę funkcji *V*, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

2. Jeżeli zdający obliczy pochodną funkcji *f* lub *V* z błędem rachunkowym i otrzyma funkcję liniową albo funkcję kwadratową o ujemnym wyróżniku [lub][[2]](#footnote-2) o wyróżniku równym 0, to może otrzymać punkty jedynie za pierwszy etap rozwiązania.

3. Jeśli zdający rozwiązuje zadanie dla stożka, to otrzymuje **0 punktów**, nawet jeśli rozwiązanie tego innego zadania jest poprawne.

4. Za rozwiązanie z konkretną wartością liczbową w miejsce *P* zdający otrzymuje **0 punktów**.

**Kiedy egzaminator powinien uznać, że uczeń uzasadnił istnienie wartości największej funkcji?**

Przypuśćmy teraz, że kryterialnej ocenie podlegają poniższe rozwiązania, w których pierwsze etapy są we wszystkich przypadkach jednakowe, takie jak zapisane poniżej, a w dalszym rozwiązaniu brakuje istotnych elementów (np. wyznaczenia dziedziny) lub komentarzy.

|  |
| --- |
| Niech  oraz  oznaczają, odpowiednio, promień podstawy walca i wysokość walca. Pole *P* powierzchni całkowitej tego walca jest równe . Stąd.Objętość walca  zapisujemy jako funkcję zmiennej :.Pochodna funkcji *V* jest określona wzorem .Wyznaczamy miejsca zerowe i badamy znak pochodnej: wtedy i tylko wtedy, gdy  lub  (oczywiście musi być ). |
|  | ***Część wspólna rozwiązań.*** |

|  |
| --- |
| Zbadajmy znak pochodnej szkicując jej wykres.Szukana objętość jest równa . Gdy , to wtedy . |
|  | *Dokończenie rozwiązania -* ***Wariant 1.*** |

|  |
| --- |
| Zbadajmy znak pochodnej szkicując jej wykres.Szukana objętość jest równa . Gdy , to wtedy . |
|  | *Dokończenie rozwiązania -* ***Wariant 2.*** |

|  |
| --- |
| Zbadajmy znak pochodnej szkicując jej wykres.Szukana objętość jest równa . Gdy , to wtedy . |
|  | *Dokończenie rozwiązania -* ***Wariant 3.*** |

|  |
| --- |
| Zbadajmy znak pochodnej szkicując jej wykres.Szukana objętość jest równa . Gdy , to wtedy . |
|  | *Dokończenie rozwiązania -* ***Wariant 4.*** |

|  |
| --- |
| Zbadajmy znak pochodnej szkicując jej wykres.Szukana objętość jest równa . Gdy , to wtedy . |
|  | *Dokończenie rozwiązania -* ***Wariant 5.*** |

|  |
| --- |
| Zbadajmy znak pochodnej szkicując jej wykres.Szukana objętość jest równa . Gdy , to wtedy . |
|  | *Dokończenie rozwiązania -* ***Wariant 6.*** |

**Analiza poszczególnych wariantów.**

Na wstępie należy wskazać, że niemal od początku istnienia „nowej matury”, zapewne z powodu skrócenia czasu pisania egzaminu maturalnego (w stosunku do czasu, jaki znali ze swoich doświadczeń twórcy nowego systemu egzaminacyjnego), przy istotnym zwiększeniu liczby zadań nie oczekuje się od abiturientów komentowania poszczególnych etapów rozwiązania (uwaga ta nie dotyczy oczywiście zadań „na dowodzenie”). Co więcej, często to na egzaminatora nakłada się obowiązek „odgadnięcia co autor (rozwiązania) miał na myśli”. A jeśli ta nigdzie nie unormowana zasada miałaby ulec zmianie, w szczególności w kontekście różnicy między ekstremum lokalnym i ekstremum globalnym funkcji, to należałoby w odpowiedni sposób zmodyfikować polecenie zadania lub tak dobrać problem, by ta różnica miała znaczenie w znalezieniu rozwiązania. Nie można bowiem dopuszczać do sytuacji, że jeden zdający „narysuje strzałki”, co pozwali mu uzyskać punkt przy absolutnie minimalnym nakładzie pracy i czasu, jaki musi na taki zapis przeznaczyć, a drugi będzie odwoływał się do funkcji odpowiedniej klasy, analizował warunki konieczne i dostateczne istnienia ekstremum funkcji różniczkowalnej oraz badał przejścia graniczne, co przy znacznej pracochłonności arkuszy może mieć znaczący wpływ na osiągnięty przez niego wynik. Dlatego to na systemie egzaminacyjnym (rozumiemy tutaj tych, którzy formułują kryteria, a zwłaszcza ich wykładnię) spoczywa obowiązek określenia „swoistego minimum”, które uznaje się za wystarczające do uznania, że uczeń uzasadnił, że dana wielkość przyjmuje największą/najmniejszą wartość. Ale byłoby wskazane, by taka wykładnia, w czasie odpowiednio odległym od kolejnej sesji egzaminacyjnej, była poddana dyskusji w środowisku, co pozwoli uniknąć wątpliwych interpretacji, wprost sprzecznych z twierdzeniami przywoływanymi w klasycznej publikacji G.M. Fichtenholza, wymagających przywołania monotoniczności funkcji i kwestionujących samą zmianę znaku pochodnej, jako warunku wystarczającego istnienia ekstremum.

Przechodząc do omówienia poszczególnych rozwiązań należy wskazać, że we wszystkich wariantach kończących rozwiązanie zdający nie otrzyma punktu za dziedzinę, ale także we wszystkich wariantach wyznaczył zarówno wartość największą objętości, jak i wysokość tego z walców, którego objętość jest największa.

Pozostaje więc tylko rozstrzygnąć, czy zdający winien otrzymać punkt za „*zbadanie znaku pochodnej funkcji V i uzasadnienie, że dla funkcja  osiąga największą wartość*”.

Nie sposób kwestionować faktu, że zdający zbadał znak pochodnej w każdym z wariantów − w tym celu naszkicował poprawny wykres funkcji pochodnej (oczywiście w zbiorze *R* , ale kwestia wyznaczenia dziedziny jest oceniana w innym miejscu). Zdający nie daje nam także żadnych podstaw, byśmy kwestionowali jego wiedzę w zakresie odczytywania znaku funkcji − przecież jest to elementarna umiejętność nawet na poziomie podstawowym. Dlatego doszukiwanie się różnic między wariantami 1. i 2. jest nieuzasadnione. Ale z całą pewnością na wykresie widać zmianę znaku pochodnej, co przy spełnieniu warunku koniecznego pozwala wnioskować o istnieniu ekstremum lokalnego, a z faktu, iż pochodna zmienia znak z dodatniego na ujemny, wynika, że mamy tu do czynienia z maksimum lokalnym.

Ta przywołana w ostatnim zdaniu własność jest podana w publikacji G.M. Fichtenholza jako warunek wystarczający istnienia ekstremum, dlatego nie ma uzasadnienia dla rozróżniania w procesie oceny wariantów 2. i 6. Jeśli dla autora kryteriów ważne byłoby badanie monotoniczności funkcji, to po raz kolejny pozostaje zaapelować, by to w treści zadania o taką analizę monotoniczności poprosić.

Także zaznaczenie na rysunku zbioru liczb dodatnich jako dziedziny, czyli ponowne odwołanie się zdającego do błędnie zapisanej dziedziny (wyznaczonej w pierwszym etapie rozwiązania zadania), nie może różnicować wariantów 2. i 3., ponieważ jest to tylko inna forma zapisu tego, co wcześniej już w rozwiązaniu się pojawiło.

Pozostaje wreszcie „porównać” warianty 4. i 5. Pojawiają się sugestie, iż zdający, który na rysunku użyje zapisu „*największy*” legitymuje się wyższymi kompetencjami niż ten, który użyje swoistego skrótu i użyje słowa „*max*”. Przypuszczenie, że pierwszy z nich „na pewno widzi” różnicę między ekstremum lokalnym i globalnym, a drugi tej świadomości nie ma, jest niczym nieuzasadnione. Ale jeśli taka myśl przyszłaby komuś do głowy, to z pewnością nie zostało to w żaden sposób uargumentowane, a przecież pominięcie istotnych części rozwiązania może skutkować nieprzyznaniem odpowiednich punktów − i z całą pewnością moglibyśmy tych punktów autorom obu wariantów nie przyznać, gdyby nie Klasyk (G.M. Fichtenholz), który pisał w jednej z uwag: „*W zastosowaniach najczęściej spotykamy prosty przypadek, gdy między a i b znajduje się tylko jeden podejrzany punkt* $x\_{0}$*. Jeśli w punkcie tym będzie maksimum (minimum), to nie porównując nawet z wartościami funkcji na końcach przedziału możemy powiedzieć, że będzie to właśnie największa (najmniejsza) wartość funkcji w przedziale*.”

W procesie sprawdzania i oceniania prac maturalnych wielokrotnie mogliśmy usłyszeć tezę, przywoływaną przy różnych zadaniach i „zadziwiających” rozwiązaniach, iż dopóty, dopóki zdający nie odkryje się ze swoją niewiedzą, to musimy przyjmować, że jest to „dobre” rozwiązanie. Trudno jest zrozumieć dlaczego w tym jednym zadaniu o tej „generalnej” zasadzie mielibyśmy zapomnieć.

Dlatego w pełni uzasadnione byłoby uznanie wszystkich powyżej zapisanych wariantów rozwiązania za niemal tożsame i zobowiązanie egzaminatora (zgodnie ze schematem) do przyznania punktu za uzasadnienie, że „*objętość przyjmuje największą wartość*”.

A swoją drogą można pomarzyć o powrocie do takiego egzaminu, w którym uczeń, dla uzyskania maksymalnej liczby punktów, będzie zobowiązany do komentowania każdego etapu swojego rozwiązania − ale wówczas należałoby istotnie zmniejszyć liczbę zadań i wydłużyć czas trwania egzaminu maturalnego z matematyki, o co po raz kolejny apelujemy.

1. Zadanie optymalizacyjne w sesji majowej 2019 jest najlepszym przykładem rozmijania się teorii, która wymaga i ocenia sposób wyznaczenia dziedziny w danym modelu matematycznym, z praktyką, która w tym roku zobowiązywała do punktowania zapisu  , który często pojawiał się niejako automatycznie (wszak dotyczy mierzenia obiektu geometrycznego) i bezrefleksyjnie. [↑](#footnote-ref-1)
2. Dopisek Autorów. [↑](#footnote-ref-2)